#### Лекция № 7

###### Симплекс – метод решения задачи линейного программирования

При

*n*  *m*  2

или 3 для решения задач ЛП можно предложить

геометрические методы, хотя при

*n*  *m*  3

их применение уже

затруднительно. Поэтому в общем случае (при произвольном числе свободных переменных) применяются вычислительные методы. Наиболее универсальным из них является т.н. ***симплекс-метод***.

Пусть имеется *n* переменных и *m* независимых уравнений (дана

ОЗЛП)

*n*  *m*  *k* . Значит, можно выбрать *k* свободных переменных,

остальные *m* -базисные.

Если оптимальное решение существует, то оно достигается в одной из опорных точек (вершин ОДР), где по крайней мере *k* переменных равны нулю.

Пусть

*x*1 , *x*2 ,..., *xk*

* свободные. Тогда:

*xk* 1  *ak* 1,1*x*1  *ak* 1,2 *x*2  ...  *ak* 1, *k xk*  *k* 1



*x*

 *k*  2



 *ak*  2,1*x*1

 *ak*  2,2 *x*2

 ...  *a*

*k*  2, *k xk*

 *k*  2

(5.1)

........................................................

*x*  *a x*  *a x*  ...  *a x*  *n*

 *n n*,1 1 *n*,2 2 *n*, *k k*

Положим, что свободные переменные равны нулю:

*x*1  0, *x*2  0,..., *xk*  0

При этом получим

*xk*1  *k*1 ,

*xk* 2  *k* 2 , …,

*xn*  *n*

(\*)

Это решение может быт допустимым или недопустимым. Оно допустимо,

если все свободные члены

*k* 1 ,

*k* 2 , …, *n*

*неотрицательны*. Предположим,

что решение *допустимо*. Тогда решение (\*) – *опорное решение*. Оптимально

ли оно? Для ответа нужно Е выразить через переменные:

*x*1 , *x*2 ,..., *xk* , т.е. через свободные

*E*   0  1*x*1   2 *x*2 ...  *k xk*

(5.2)

Очевидно, что при

*x*1  *x*2 ...  *xk*  0 ,

*E*   0 .

Посмотрим нельзя ли улучшить решение (т.е. уменьшить Е), увеличивая

какие-нибудь из переменных равны нулю).

*x*1 , *x*2 ,..., *xk*

(уменьшать нельзя, т.к. все они

Если все

 *i* ,

*i*  1, *k*

в (5.2) положительны, то увеличивая какие-то из

переменных

*x*1 , *x*2 ,..., *xk*

сверх нуля, мы не можем уменьшать Е;

следовательно, найденное опорное решение (\*) *оптимальное*.

Если же среди

 *i* ,

*i*  1, *k*

есть отрицательные, то увеличивая некоторые

из переменных (а именно те, коэффициенты при которых отрицательные) можно улучшить (уменьшить) Е.

Пусть  *i*  0 . Значит, есть смысл увеличить

*x*1 , т.е. перейти от опорного

решения (\*) к другому, где переменная.

*x*1  0 , а вместо неё равна нулю другая

Увеличивать

*x*1 надо так, чтобы не стали отрицательными другие

переменные (из числа базисных в (5.1).

Увеличение

*x*1 «опасно» для тех базисных переменных из (5.1), чьё

уравнение содержит при

*x*1 отрицательный коэффициент.

Если же в (5.1) во всех уравнениях коэффициенты при *x*1

положительны, то

*x*1 можно увеличивать беспредельно, следовательно

функция Е не ограничена снизу и оптимального решения ОЗЛП не существуют.

Допустим, что это не так, т.е. среди уравнений (5.1) есть такие, в

которых коэффициент при

*x*1 отрицателен, т.е. для соответствующих

базисных переменных увеличение отрицательными.

*x*1 «опасно» - оно может их сделать

Пусть одна из таких базисных переменных - *xl*

*xl*  *l*,1*x*1  *l*,2*x*2 ... *al* ,*k xk*  *l* ; *l*  0

( *l* {*k* 1, *k*  2,..., *n*}) *l*1  0

Очевидно, что, если оставить

*x*2  0, *x*3  0,..., *xk*  0 , то

*x*1 можно увеличивать

только до значения:

 *l* /*l*,1.

На этом шаге мы показывали, что опорное решение (\*) не оптимальное,

что есть возможность его улучшить за счёт увеличения

*x*1 . Попробуем

перейти к другому опорному решению. Для этого выберем ту из переменных

*xk*1,..., *xn* , которая раньше всех обратится в нуль при увеличении *x*1 , т.е. для

которой величина (  *l* /*l*,1, *l*  *k* 1,...,*n* ) минимальна. Пусть таковой

является

*xr* . Теперь имеет смысл «переразрешить» систему (5.1)

относительно других базисных переменных, выведя из числа свободных

*x*1 и

введя вместо неё в группу свободных

*xr* .

То есть мы хотим перейти от опорного решения (\*), задаваемого

*x*1  *x*2 ,..., *xk*  0

к опорному решению

*x*2  *x*3 ,..., *xk*  *xr*  0 ,

*x*1  0

(в этом

случае базисными будут переменные:

*x*1, *xk*1,..., *xr*1, *xr*1,..., *xn* .

Допустим теперь, что уравнения типа (5.1) для нового набора

свободных и базисных переменных составлены. Тогда, через

*x*2 , *x*3 ,..., *xk* , *xr*

выражается и Е. Если в выражении Е типа (5.2) все коэффициенты положительны, то нашли оптимальное решение: оно получится, если все свободные переменные положить равными нулю. Если в Е среди коэффициентов есть отрицательные, то процедура улучшения Е продолжается: система вновь «переразрешается» относительно других базисных переменных и т.д. пока не будет найдено оптимальное решение, обращающее Е в минимум.

Пример.

 5*x*1  *x*2  2*x*3  2



 *x*1  *x*3  *x*4  5 

(5.3)

 3*x*1  5*x*4  7 



*E*  5*x*1  2*x*3

Переводим (5.3) в стандартный вид и вводим добавочные переменные

*y*1 , *y*2 , *y*3 :

*y*1  5*x*1  *x*2  2*x*3  2



*y*2  *x*1  *x*3  *x*4  5 



(5.4)

*n*  7 :

*x*1, *x*2 , *x*3 , *x*4 , *y*1, *y*2 , *y*3

*y*3  3*x*1  5*x*4  7 

*m*  3 ; *n*  *m*  4 (Значит, четыре свободных переменных).

Пусть

*x*1, *x*2 , *x*3 , *x*4

* свободные.

Положим:

*x*1  *x*2  *x*3  *x*4  0 .

Опорное решение:

*x*1  0; *x*2  0; *x*3  0; *x*4  0 ;

*E*  0

*y*1  2; *y*2  5; *y*3  7

(\*)

Так как, в

*E*  5*x*1  2*x*3

при

*x*3 коэффициент отрицателен, то опорное

решение (\*) не оптимальное.

*x*3 можно увеличивать. Такое увеличение «опасно» для

*y*1 и

*y*2 (см.

5.4). Причём

*y*1  0

при

*x*3  1;

*y*2  0

при

*x*3  5 . Поэтому берём

*y*1 и

осуществим операцию

*x*3  *y*1 . Для этого из I-го уравнения из (5.4) имеем:

*x*  5 *x*  1 *x*  1 *y* 1

3 2 1 2 2 2 1

Это подставим во II -е уравнение:

*y*  *x*  5 *x*  1 *x*  1 *y* 1 *x*  5   3 *x*  1 *x*  1 *y*  *x*  4

2 1 2 1 2 2 2 1 4 2 1 2 2 2 1 4

Итак, получим новую систему типа (5.4):

*x*  5 *x*  1 *x*  1 *y* 1 

3 2 1 2 2

*y*2   2 *x*1  2 2

3

*x*

1

2 1

 2 *y*1

1

* *x*4





 4





(5.5)

*x*3 , *y*2 , *y*3

*y*3  3*x*1  5*x*4  7 



* базисными переменные.

*E*  5*x*1  5*x*1  *x*2  *y*1  2  *x*2  *y*1  2

(5.6)

Положим

*x*1  *x*2  *x*4  *y*1  0;

*E*  2

(это уже лучше); опорное

решение

*x*1  *x*2  *x*4  *y*1  0;

*x*3  1;

*y*2  4 ;

*y*3  7 . В (5.6) коэффициент при

*x*2 отрицателен. Значит,

*x*2  , чтобы

*E* .

*x*2 

«опасно» для

*y*2 .

Проведём операцию

*x*2  *y*2 :

* + разрешим второе уравнение из (5.5) отрицательно *x*2 и
	+ подставим полученное выражение *x*2

В итоге получим:

в уравнение I-е.

*x*3  *x*1  *y*2  *x*4  5 



*x*2  3*x*1  2 *y*2  *y*1  2*x*4  8

(5.7)

*y*3  3*x*1  5*x*4  7 



*x*3 , *x*2 , *y*3 - базисные переменные.

*E*  3*x*1  2*y*2  2*x*4 10

(5.8)

Положим

*x*1  *y*2  *x*4  *y*1  0, тогда

*E*  10

В (5.8) коэффициенты при переменных положительны, следовательно

переменные увеличивать нельзя. Таким образом, опорное решение *x*\*  0 ;

1

*x*\*  8 ;

2

*x*\*  5 ;

*x*\*  0 ;

*y*\*  0 ;

*y*\*  0 ;

*y*\*  7

- оптимальное решение;

*E*\*  10  *E*min

3

4

1

2

3

В данном примере опорного решения нам не пришлось искать: оно сразу же получилось в виде (\*), когда все свободные переменные положили равным нулю и ввиду положительности всех свободных членов в уравнениях (5.4). Если последнее не имеет места, то можно найти первое опорное решение с помощью такой же процедуры обмена местами некоторых базисных и свободных переменных, переразрешая уравнения до тех пор, пока все свободные члены в уравнениях типа (5.4) не окажутся неотрицательными.

###### Табличный алгоритм замены базисных переменных.

«Переразрешение» системы относительно новых базисных переменных удобно производить *по табличному алгоритму*.

Пусть дана система:

*y*1 , *y*2 , *y*3

* базисные,

*y*1  *a*11*x*1  *a*12 *x*2  *a*13*x*3  *b*1 *y*2  *a*21*x*1  *a*22 *x*2  *a*23*x*3  *b*2 *y*3  *a*31*x*1  *a*32 *x*2  *a*33*x*3  *b*3

*x*1, *x*2 , *x*3 - свободные переменные.

(6.1)

Требуется

*x*2  *y*3 .

Перепишем (6.1) в форме:

*y*1  *b*1  (11*x*1  12 *x*2  13 *x*3 ) *y*2  *b*2  (21*x*1  22 *x*2  23 *x*3 ) *y*3  *b*3  (31*x*1  32 *x*2  33 *x*3 )

где 11  *a*11 ; 12  *a*12 ; … ; 33  *a*33

(6.2)

Форма записи (6.2) – называется *стандартной*. Стандартную запись (6.2) можно задать *стандартной таблицей*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | своб. чл. | *x*1 | *x*2 | *x*3 |
| *y*1 | *b*1 | 11 | 12 | 13 |
| *y*2 | *b*2 |  21 | 22 |  23 |
| *y*3 | *b*3 | 31 | 32 | 33 |

Строку и столбец, где стоит *разрешающий элемент разрешающий строкой и разрешающим столбцом*.

32

назовём

Найдём из (6.2) коэффициенты, которые нужно поставить в

разрешающей строке после операции уравнение из (6.2.)

 

*x*2  *y*3 . Решаем для этого третье

*x*  *b*3

2 

 31



*x*  1

1 

*y*3 

1231

##### 



*x*3 

(6.3)

32  32 32 32 

В (6.3) найдены элементы новой строки, соответствующей разрешающей строке. Для получения остальных строк, например, первой делаем

постановки. Подставим

*x*2 из (6.3) в первое уравнение из (6.2) и приведя

подобные члены получим:

 12*b*3  

1231 

 12  

1233  

*y*1  *b*1     11  

*x*1     *y*3  13  

*x*3 

 32  

32   32  

32  

Проведя аналогичное действие для второй строки, в итоге получим преобразованную таблицу

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | своб. чл. | *x*1 | *y*3 | *x*3 |
| *y*1 | *b*  12*b*31 32 |   123111 32 |  1232 |   123313 32 |
| *y*2 | *b*  22*b*32 32 |   223121 32 |   2232 |   223323 32 |
| *x*2 | *b*332 |  31 32 | 1 32 |  33 32 |

Обобщая проведенные действия, можно записать теперь алгоритм преобразования стандартной таблицы в следующем виде:

1. Разрешающий элемент заменяют на обратную ему величину.
2. Все остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.
3. Все элементы разрешающего столбца (кроме самого разрешающего элемента) делятся на разрешающий элемент и меняют знак.
4. Каждый из остальных элементов подвергается следующему преобразованию: к нему прибавляется произведение элемента, стоявшего в прежней разрешающей строке в том же столбце на элемент, стоящий в новом разрешающем столбце в той же строке. Алгоритм справедлив для любого числа уравнений и свободных

переменных и для любой замены

*x j*  *yi* .

Такую же замену переменных надо сделать и для Е:

E  *c*0  *c*1*x*1  *c*2 *x*2  ...  *c*n *xn* - *исходная* форма

(\*)

*E*  *c*0  1*x*1   2 *x*2 ...   *k xk* 

- *стандартная* форма. Здесь

1  *c*1 ;

 2  *c*2 ; … ;  *n*  *cn* . Следовательно, строку (\*) можно вписать в

стандартную таблицу. При замене

x j  *yi*

для этой строки Е можно

применять тот же табличной алгоритм. *Только из этой строки никогда не выбирается разрешающий элемент*.

С помощью табличного алгоритма обмена переменных в уравнениях ОЗЛП можно решить любую задачу линейного программирования или же убедиться, что она не имеет решения.

Нахождение решения распадается на 2 этапа:

1. отыскание опорного решения;
2. отыскание оптимального решения.

*В процессе первого* этапа попутно выясняется имеет ли вообще задача допустимые решения, если да, то находят опорное решение, для которого все свободные переменные равны нулю, а все базисные – неотрицательны.

*В процессе второго* этапа попутно выясняется, ограничена ли снизу линейная функция Е; если нет, то оптимального решения нет. Если да, то оно

находится после того или другого числа операций

x j  *yi* .

Оба эти этапа удобно выполнять с помощью описанного алгоритма преобразования стандартных таблиц.

###### Контрольные вопросы

1. Расскажите основную идею симплекс-метода.
2. В чем состоит механизм поиска оптимального решения в симплекс- методе?
3. Почему нельзя уменьшать свободные переменные при поиске оптимального решения симплекс-методом?
4. Что означает термин «переразрешение» базисных переменных в системе уравнений ограничений ОЗЛП?
5. Опишите табличный алгоритм замены базисных переменных в симплекс-методе.
6. Дайте определения: стандартная симплекс-таблица, разрешающий элемент, разрешающая строка и разрешающий столбец.
7. Из каких двух этапов состоит решение ОЗЛП при использовании табличного алгоритма замены переменных в симплекс-методе?